

Réduction de dettes mutuelles entre entreprises : heuristiques sur des graphes de paiements

Balthazar Patiachvili

Sous la direction de Sylvain Contassot-Vivier et Nazim Fatès

ENS Paris-Saclay & LORIA

2 septembre 2022

Contexte (1/2)

Problématique

Délai moyen de paiement d'une dette entre entreprises : 3 mois (en zone euro)

Contexte (1/2)

Problématique

Délai moyen de paiement d'une dette entre entreprises : 3 mois (en zone euro)

Conséquences

- Accumulation des factures
- Mise en difficulté des entreprises (impossibilité de rembourser ses dettes, ...)
- Faillite dans le pire des cas

Contexte (2/2)

Solutions usuelles

- Prêts ou affacturage (achat de dette)
- Création d'une économie parallèle (exemples : Sardex en Sardaigne, WIR en Suisse)

Contexte (2/2)

Solutions usuelles

- Prêts ou affacturage (achat de dette)
- Création d'une économie parallèle (exemples : Sardex en Sardaigne, WIR en Suisse)

Nouvelle solution proposée

Réduction de dettes mutuelles par aide d'un acteur extérieur connaissant la totalité des dettes potentiellement annulables

Contexte (2/2)

Solutions usuelles

- Prêts ou affacturage (achat de dette)
- Création d'une économie parallèle (exemples : Sardex en Sardaigne, WIR en Suisse)

Nouvelle solution proposée

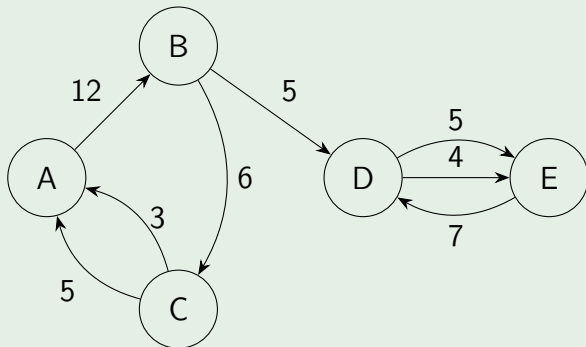
Réduction de dettes mutuelles par aide d'un acteur extérieur connaissant la totalité des dettes potentiellement annulables

Avantage

Permet de débloquent les situations d'attente de paiement grâce à un effet d'entraînement

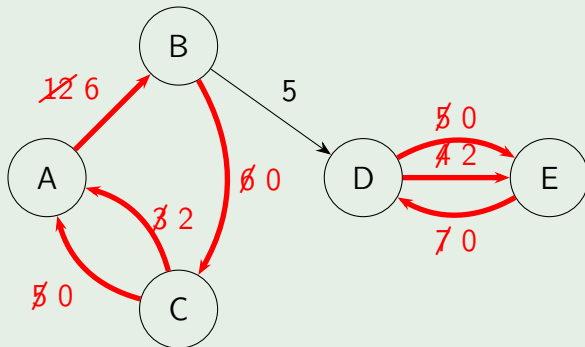
Illustration

Exemple



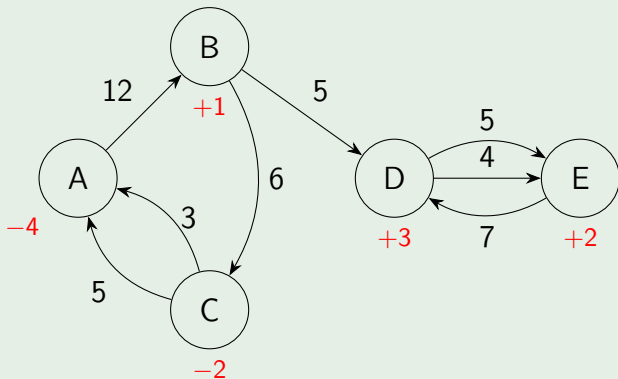
Illustration

Résolution par réduction partielle de dettes mutuelles



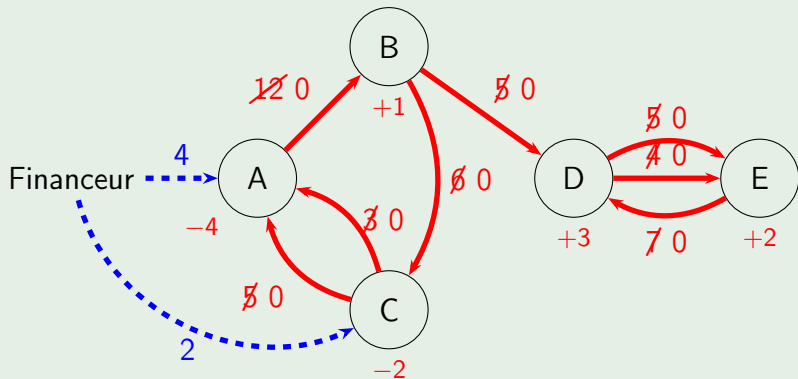
Illustration

Résolution par réduction intégrale de dettes mutuelles



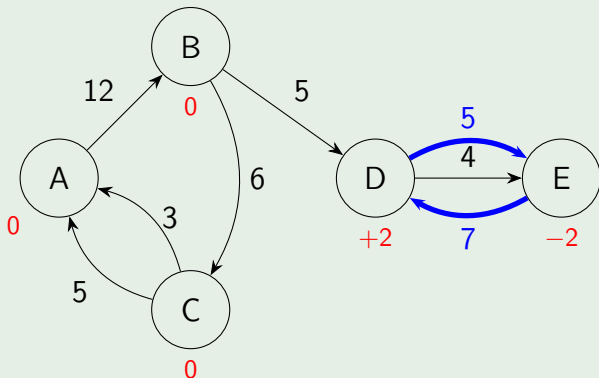
Illustration

Résolution par réduction intégrale de dettes mutuelles



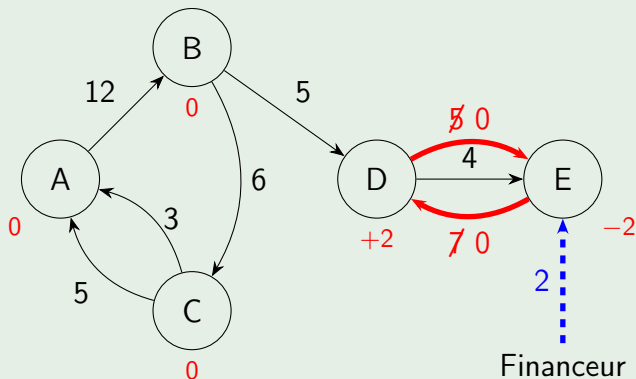
Illustration

Résolution par réduction intégrale de dettes mutuelles



Illustration

Résolution par réduction intégrale de dettes mutuelles



Problème général

Problème

À partir d'un graphe de dettes donné et d'une somme maximale de financement, on veut maximiser la somme des dettes annulées, et ce en un temps raisonnable.

Problème général

Problème

À partir d'un graphe de dettes donné et d'une somme maximale de financement, on veut maximiser la somme des dettes annulées, et ce en un temps raisonnable.

NP-complétude

Ce problème est NP-complet.

Objectif du stage

En supposant que $P \neq NP$, trouver des heuristiques permettant de trouver une solution approchée de l'idéale en un temps raisonnable pour de grosses instances (de l'ordre de 10^4 entreprises pour 10^5 dettes).

Sommaire

- 1 Définitions formelles
- 2 Algorithme glouton
- 3 Algorithme génétique
- 4 Comparaison des algorithmes glouton et génétique
- 5 Conclusion

Notions liées au problème (1/2)

Multigraphe orienté pondéré

Un multigraphe est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que :

- \mathcal{V} est un ensemble de nœuds/sommets
- \mathcal{E} est un multi-ensemble inclus dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathbb{N}^*$

Notions liées au problème (1/2)

Multigraphe orienté pondéré

Un multigraphe est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que :

- \mathcal{V} est un ensemble de nœuds/sommets
- \mathcal{E} est un multi-ensemble inclus dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathbb{N}^*$

Somme réglée

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *somme réglée de S* , ou $\Sigma(S)$, la somme des poids de toutes les arêtes de S .

Notions liées au problème (1/2)

Multigraphe orienté pondéré

Un multigraphe est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que :

- \mathcal{V} est un ensemble de nœuds/sommets
- \mathcal{E} est un multi-ensemble inclus dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathbb{N}^*$

Somme réglée

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *somme réglée de S* , ou $\Sigma(S)$, la somme des poids de toutes les arêtes de S .

Position nette

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe, $S \subseteq \mathcal{E}$ et $v \in \mathcal{V}$.

On appelle *position nette de v dans S* , ou $\pi_S(v)$, la somme pondérée des poids d'arêtes de S en v .

Notions liées au problème (2/2)

Financement

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *financement de S* : $\phi(S) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \max(0, -\pi_S(v))$.

Notions liées au problème (2/2)

Financement

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *financement de S* : $\phi(S) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \max(0, -\pi_S(v))$.

Facteur d'amplification

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *facteur d'amplification de S* : $\alpha(S) = \frac{\Sigma(S)}{\phi(S)}$.

Notions liées au problème (2/2)

Financement

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *financement de S* : $\phi(S) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \max(0, -\pi_S(v))$.

Facteur d'amplification

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *facteur d'amplification de S* : $\alpha(S) = \frac{\Sigma(S)}{\phi(S)}$.

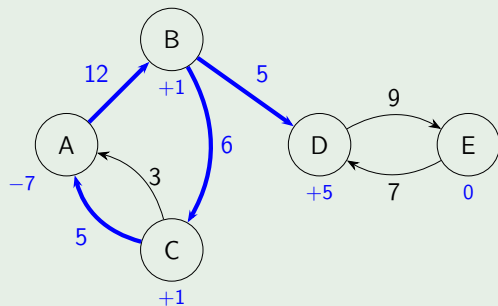
Facteur d'inclusion

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $S \subseteq \mathcal{E}$.

On appelle *facteur d'inclusion de S* : $\iota(S) = \frac{\Sigma(S)}{\Sigma(\mathcal{E})}$.

Illustration

Exemple



$S = \{\text{arrête bleues}\}$

- $\Sigma(S) = 12 + 6 + 5 + 5 = 28$
- $\phi(S) = \max(0, -1) + \max(0, -5) + \max(0, -1) + \max(0, 7) = 7$
- $\alpha(S) = \frac{28}{7} = 4$ et $\iota(S) = \frac{28}{47} \approx 0,596$

Problème de réduction partielle

Problème de réduction partielle de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathbb{N}$ tel que $\forall (u, v, y) \in \mathcal{E}, \exists y' \in \llbracket 0, y \rrbracket$ tel que $(u, v, y') \in S$, $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

Problème de réduction partielle

Problème de réduction partielle de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathbb{N}$ tel que $\forall (u, v, y) \in \mathcal{E}, \exists y' \in \llbracket 0, y \rrbracket$ tel que $(u, v, y') \in S$, $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

Résolution en temps polynomial

Le problème de réduction partielle de dettes mutuelles peut se résoudre en temps polynomial en fonction de $|\mathcal{V}|$ et de $|\mathcal{E}|$.

Problème de réduction intégrale

Problème de réduction intégrale de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

Problème de réduction intégrale

Problème de réduction intégrale de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

NP-complétude

Le problème de réduction intégrale de dettes mutuelles est NP-complet.

Problème de réduction intégrale

Problème de réduction intégrale de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

NP-complétude

Le problème de réduction intégrale de dettes mutuelles est NP-complet. \rightarrow Vrai dès 2 sommets

Problème de réduction intégrale

Problème de réduction intégrale de dettes mutuelles

Soient $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un multigraphe et $Q \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $S \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\phi(S) \leq Q$ et $\Sigma(S)$ maximal.

S : ensemble des dettes réglées

Q : financement maximal à ne pas dépasser

NP-complétude

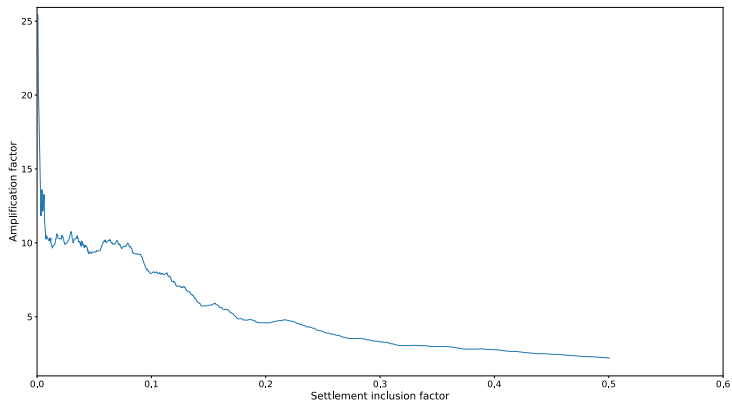
Le problème de réduction intégrale de dettes mutuelles est NP-complet. \rightarrow Vrai dès 2 sommets

Problème optimisé

Pour des raisons économiques, le problème qui a été optimisé n'est pas exactement celui-ci mais : trouver $S \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\iota(S) \geq 50\%$ et $\alpha(S)$ maximal.

Difficulté du problème

Courbe de compromis



Sommaire

- 1 Définitions formelles
- 2 Algorithme glouton**
- 3 Algorithme génétique
- 4 Comparaison des algorithmes glouton et génétique
- 5 Conclusion

Description de l'approche (1/3)

Potentiel de réduction

Financer les dettes qui permettent d'annuler la plus grande somme possible : potentiel de réduction

Description de l'approche (1/3)

Potentiel de réduction

Financer les dettes qui permettent d'annuler la plus grande somme possible : potentiel de réduction

Chemins gloutons

Chemin obtenu après l'algorithme suivant :

- Financement d'une arête initiale
- Tant qu'il reste au moins une arête disponible, ajouter au chemin l'arête de poids maximal qui n'engendre pas de financement supplémentaire parmi les arêtes sortantes du nœud de fin

Description de l'approche (1/3)

Potentiel de réduction

Financer les dettes qui permettent d'annuler la plus grande somme possible : potentiel de réduction

Chemins gloutons

Chemin obtenu après l'algorithme suivant :

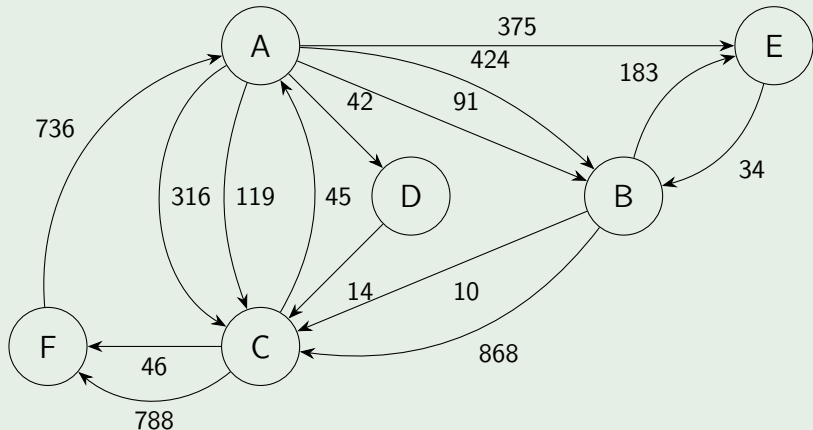
- Financement d'une arête initiale
- Tant qu'il reste au moins une arête disponible, ajouter au chemin l'arête de poids maximal qui n'engendre pas de financement supplémentaire parmi les arêtes sortantes du nœud de fin

Calcul du potentiel : POT

Réitération de l'algorithme du chemin glouton sur les nœuds déjà visités par ordre décroissant de position nette tant que possible

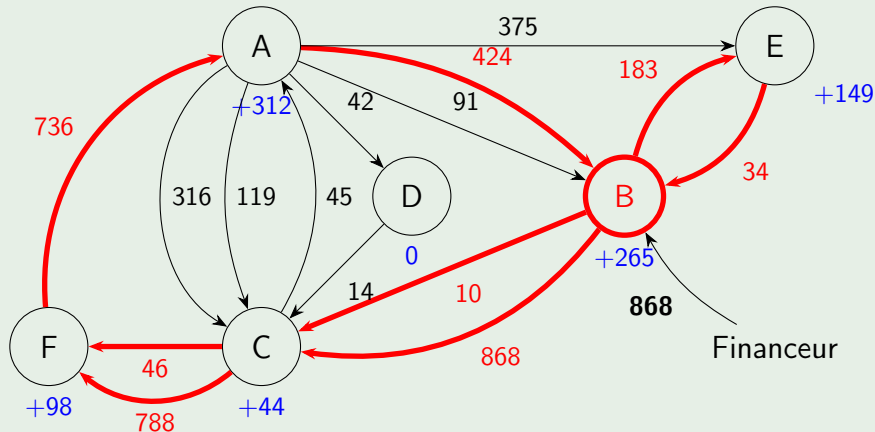
Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



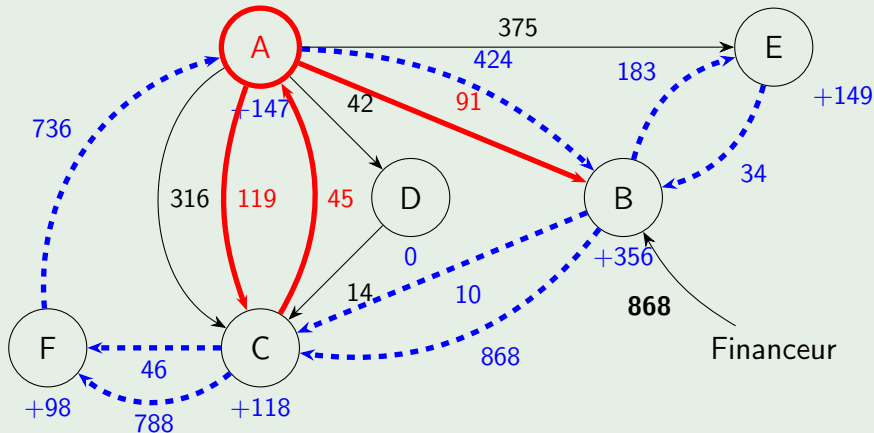
Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



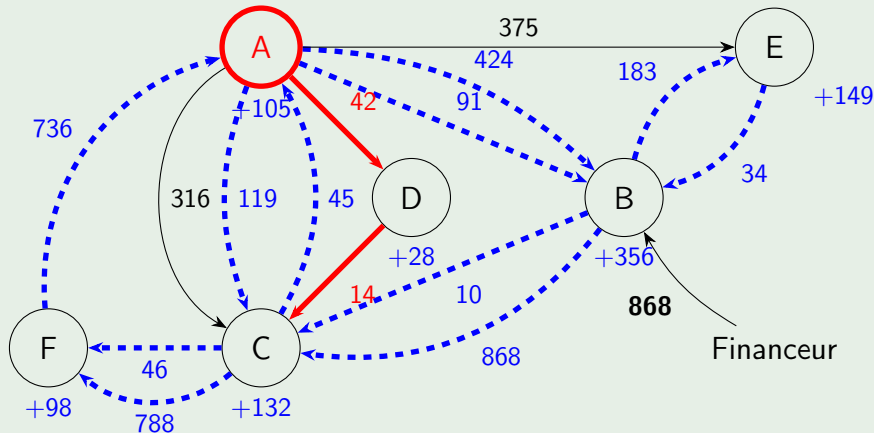
Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



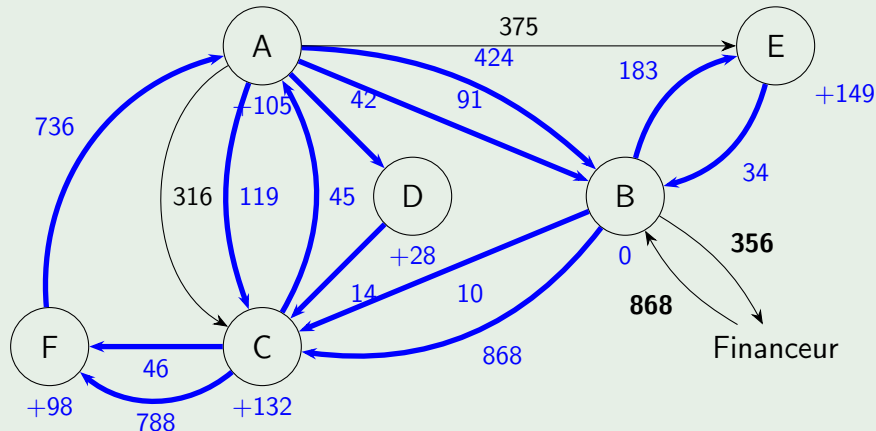
Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



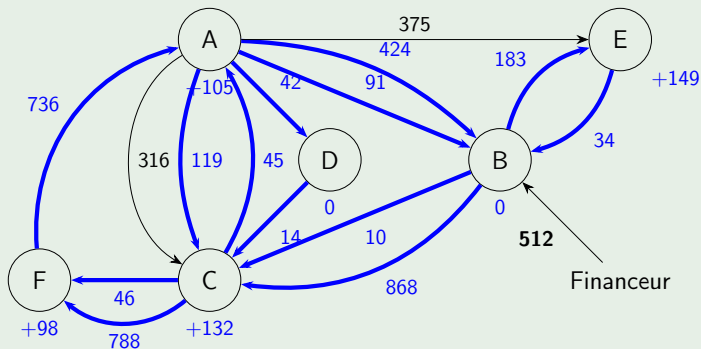
Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



Description de l'approche (2/3)

Exemple d'exécution de l'algorithme POT



On note S l'ensemble des arêtes bleues.

$$\Sigma(S) = 3\,400, \phi(S) = 512, \text{ donc } \alpha(S) = \frac{3\,400}{512} \approx 6,64$$

$$\Sigma(\mathcal{E}) = 4\,091, \text{ d'où } \iota(S) = \frac{3\,400}{4\,091} \approx 83,1\%.$$

Description de l'approche (3/3)

Algorithme complet

- Pré-calcul de l'algorithme POT pour un financement initial de chaque arête du graphe
- Ajout de la solution de l'arête avec le plus grand potentiel de réduction ($\Sigma(S)$)
- Répétition des deux étapes précédentes tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint

Description de l'approche (3/3)

Algorithme complet

- Pré-calcul de l'algorithme POT pour un financement initial de chaque arête du graphe
- Ajout de la solution de l'arête avec le plus grand potentiel de réduction ($\Sigma(S)$)
- Répétition des deux étapes précédentes tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint $\rightarrow \iota(S) \geq 50\%$ pour le stage

Description de l'approche (3/3)

Algorithme complet

- Pré-calcul de l'algorithme POT pour un financement initial de chaque arête du graphe
- Ajout de la solution de l'arête avec le plus grand potentiel de réduction ($\Sigma(S)$)
- Répétition des deux étapes précédentes tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint $\rightarrow \iota(S) \geq 50\%$ pour le stage

Corrections apportées après tests

- Limitation du nombre d'arêtes testées à chaque tour de boucle

Description de l'approche (3/3)

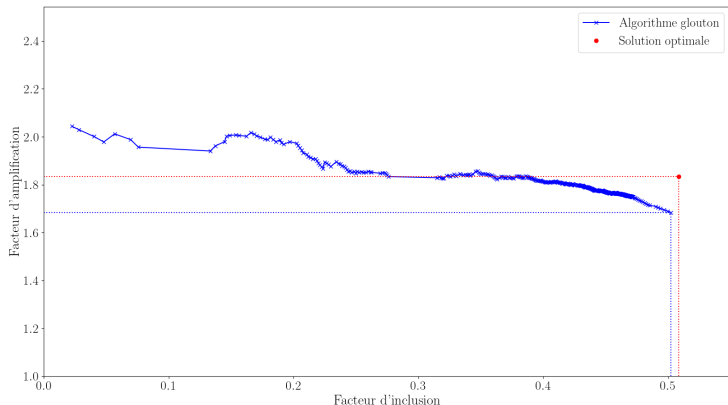
Algorithme complet

- Pré-calcul de l'algorithme POT pour un financement initial de chaque arête du graphe
- Ajout de la solution de l'arête avec le plus grand potentiel de réduction ($\Sigma(S)$)
- Répétition des deux étapes précédentes tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint $\rightarrow \iota(S) \geq 50\%$ pour le stage

Corrections apportées après tests

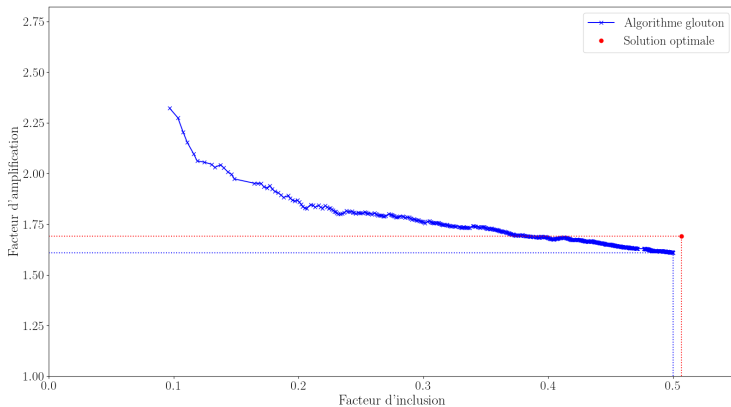
- Limitation du nombre d'arêtes testées à chaque tour de boucle
- Potentiel de réduction : ~~$\Sigma(S)$~~ $\rightarrow \alpha(S)$

Résultats



Résultat pour un graphe de 447 sommets et 1 666 arêtes avec un test de 50 arêtes à chaque étape

Résultats



Résultat pour un graphe de 868 sommets et 3 325 arêtes avec un test de 50 arêtes à chaque étape

Sommaire

- 1 Définitions formelles
- 2 Algorithme glouton
- 3 Algorithme génétique**
- 4 Comparaison des algorithmes glouton et génétique
- 5 Conclusion

Principe des algorithmes génétiques

Choix de l'approche

- Approche classique dans la résolution de problèmes NP-complets
- Permet d'observer l'efficacité d'algorithmes évolutionnistes

Principe des algorithmes génétiques

Choix de l'approche

- Approche classique dans la résolution de problèmes NP-complets
- Permet d'observer l'efficacité d'algorithmes évolutionnistes

Algorithme générique

Répétition des étapes suivantes sur une population initiale :
Sélection – Croisements – Mutations – Évaluation – Remplacement

Principe des algorithmes génétiques

Choix de l'approche

- Approche classique dans la résolution de problèmes NP-complets
- Permet d'observer l'efficacité d'algorithmes évolutionnistes

Algorithme générique

Répétition des étapes suivantes sur une population initiale :
Sélection – Croisements – Mutations – Évaluation – Remplacement

Individus

Population → Ensemble d'individus

Individu → Ensemble d'arêtes

Implémentation pour ce problème (1/3)

Algorithme implémenté

- Génération initiale d'une population de taille N fixée
- Évaluation de chaque individu
- Itération des étapes suivantes pour un nombre d'étapes fixé :
 - Conservation des meilleurs individus
 - Croisements d'une partie des meilleurs individus restants
 - Mutations d'une partie des meilleurs individus restants
 - Remplacement des individus restants par de nouveaux
 - Sélection des individus à conserver

Implémentation pour ce problème (1/3)

Algorithme implémenté

- Génération initiale d'une population de taille N fixée
- Évaluation de chaque individu
- Itération des étapes suivantes pour un nombre d'étapes fixé :
 - Conservation des meilleurs individus
 - Croisements d'une partie des meilleurs individus restants
 - Mutations d'une partie des meilleurs individus restants
 - Remplacement des individus restants par de nouveaux
 - Sélection des individus à conserver

Représentation des individus en mémoire

Codage binaire \longrightarrow liste de booléens indiquant la présence ou non de chaque arête

Implémentation pour ce problème (2/3)

Génération d'individus

À partir d'un ensemble vide, ajout d'arêtes aléatoires tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint

Implémentation pour ce problème (2/3)

Génération d'individus

À partir d'un ensemble vide, ajout d'arêtes aléatoires tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint

Croisements

Création d'un nouvel individu à partir de deux individus parents

Implémentation pour ce problème (2/3)

Génération d'individus

À partir d'un ensemble vide, ajout d'arêtes aléatoires tant que l'objectif fixé initialement n'est pas atteint

Croisements

Création d'un nouvel individu à partir de deux individus parents

Exemple de croisement

Parent 1

0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Parent 2

0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Croisement

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Implémentation pour ce problème (3/3)

Mutations

Répéter un nombre fixé de fois l'opération suivante : tirer une arête aléatoirement dans le graphe initial, l'ajouter si elle est présente dans l'individu et la retirer sinon.

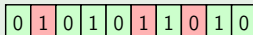
Implémentation pour ce problème (3/3)

Mutations

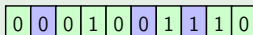
Répéter un nombre fixé de fois l'opération suivante : tirer une arête aléatoirement dans le graphe initial, l'ajouter si elle est présente dans l'individu et la retirer sinon.

Exemple de mutation

Individu initial



Individu muté



Implémentation pour ce problème (3/3)

Mutations

Répéter un nombre fixé de fois l'opération suivante : tirer une arête aléatoirement dans le graphe initial, l'ajouter si elle est présente dans l'individu et la retirer sinon.

Exemple de mutation

Individu initial

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Individu muté

0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Sélection

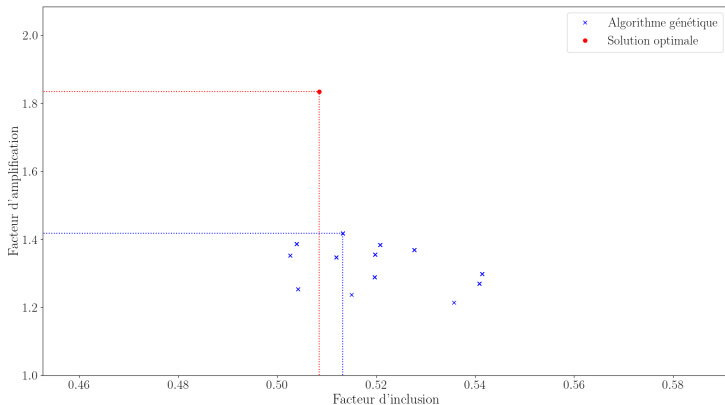
Méthode de la roulette russe : choix aléatoire des individus à conserver pondéré par leur score.

Résultats (1/2)

Changements dans l'algorithme

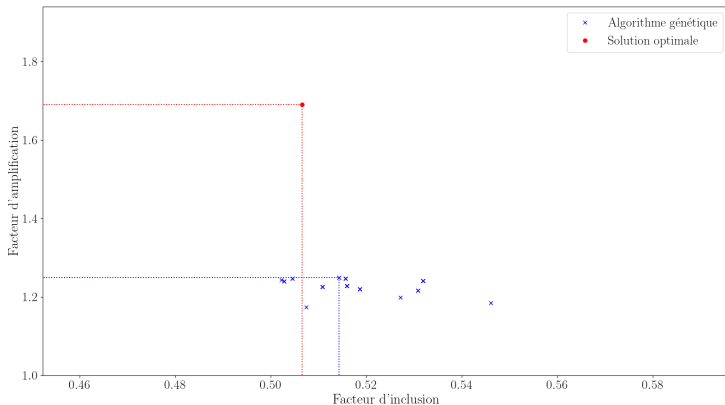
- Utilisation d'algorithmes développés pour l'algorithme glouton pour accélérer le processus
- Sélection modifiée pour enlever des individus et non pas en ajouter

Résultats (2/2)



Résultat pour un graphe de 447 sommets et 1 666 arêtes en 300 secondes

Résultats (2/2)

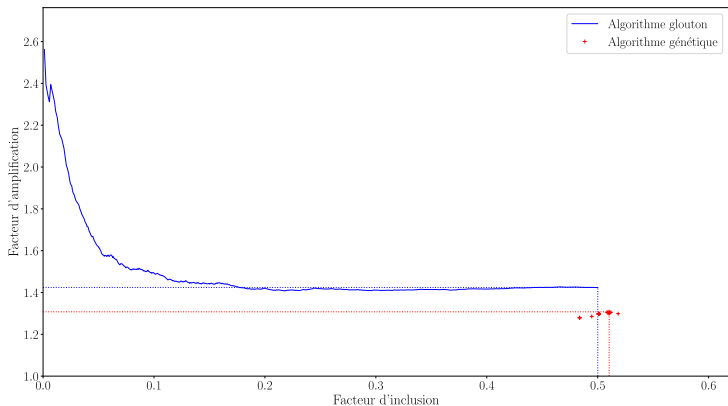


Résultat pour un graphe de 868 sommets et 3 325 arêtes en 300 secondes

Sommaire

- 1 Définitions formelles
- 2 Algorithme glouton
- 3 Algorithme génétique
- 4 Comparaison des algorithmes glouton et génétique**
- 5 Conclusion

Résultats sur un graphe réel



Comparaison des algorithmes glouton et génétique pour un graphe de 38 334 nœuds et 145 540 arêtes en 3 600 secondes

Sommaire

- 1 Définitions formelles
- 2 Algorithme glouton
- 3 Algorithme génétique
- 4 Comparaison des algorithmes glouton et génétique
- 5 Conclusion**

Conclusion

Points essentiels

- Algorithme glouton : bons résultats pour une inclusion supérieure à 30%

Conclusion

Points essentiels

- Algorithme glouton : bons résultats pour une inclusion supérieure à 30%
- Algorithme génétique : beaucoup trop lent pour obtenir des résultats aussi bons que l'algorithme glouton

Conclusion

Points essentiels

- Algorithme glouton : bons résultats pour une inclusion supérieure à 30%
- Algorithme génétique : beaucoup trop lent pour obtenir des résultats aussi bons que l'algorithme glouton
- Mêmes observations après modification des paramètres des deux algorithmes

Conclusion

Points essentiels

- Algorithme glouton : bons résultats pour une inclusion supérieure à 30%
- Algorithme génétique : beaucoup trop lent pour obtenir des résultats aussi bons que l'algorithme glouton
- Mêmes observations après modification des paramètres des deux algorithmes

Ouvertures

- Réaliser une coupe du graphe \rightarrow résoudre rapidement chaque sous-graphe \rightarrow reconstruire une solution générale
- Résoudre la version partielle du problème puis convertir la solution

- [1] M. Amato, N. Fatès et L. Gobbi, « The economics and algorithmics of an integral settlement procedure on B2B networks, », 2021. adresse : <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3915380>.
- [2] M. Vela-Mena, « Heuristic methods for mutual debt reduction on B2B networks, », 2021, Rapport de stage de L3. adresse : <https://members.loria.fr/nazim.fates/doc/rapports/RapportStage-MarieVelaMena-2022.pdf>.
- [3] A. Rousseau, « Mémoire bibliographique L3 maths-info, Étude de graphes pour la compensation mutuelle de dettes, », 2021. adresse : <https://members.loria.fr/nazim.fates/doc/rapports/memoire-biblio-Rousseau-2021.pdf>.
- [4] A. Rousseau, « Génération de graphes pour la compensation de dettes mutuelles entre entreprises, », 2021, Rapport de stage de L3. adresse : <https://members.loria.fr/nazim.fates/doc/lecture/rapportfinal-ArthurRousseau.pdf>.
- [5] M. M. Güntzer, D. Jungnickel et M. Leclerc, « Efficient algorithms for the clearing of interbank payments, » *Elsevier*, 1998. adresse : [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00265-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00265-8).

- [6] G. Iosifidis, Y. Charette, E. Airoidi, G. Littera, L. Tassioulas et N. Christakis, « Cyclic motifs in the Sardex monetary network, » *Nature Human Behaviour*, 2018. adresse : <https://doi.org/10.1038/s41562-018-0450-0>.
- [7] P. C. György, « The debts' clearing problem : a new approach, » *Acta Univ. Sapiente*, 2011. adresse : <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.3663>.
- [8] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest et C. Stein, *Introduction to Algorithms, Second edition*. 2001, p. 592-595, isbn : 0-07-013151-1. adresse : <https://mcube.lab.nycu.edu.tw/~cfung/docs/books/cormen2001algorithms.pdf>.
- [9] D. Beauquier, J. Berstel et P. Chrétienne, *Éléments d'algorithmique*. 2005, p. 241-269. adresse : <https://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Elements/Elements.pdf>.
- [10] M. Hristakeva, « Solving the 0-1 Knapsack Problem with Genetic Algorithms, », 2004. adresse : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:12659882>.